Prof. Dr. Gerhard Gerlich

Institut für Mathematische Physik der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

Mendelssohnstr. 3, 38106 Braunschweig, g.gerlich@tu-bs.de

<u>Energiesätze für geschwindigkeitsabhängige Kräfte und Wechselwirkungen</u>

(Folien, Oberseminarvortrag am 21. 7. 2006, kleine Ergänzungen bis zum 6. 8. 2006)

1) Einleitung 2
2) Der einfachste Fall 4
3) Geschwindigkeitsabhängige Kraftfelder 5
4) Geschwindigkeitsabhängige elektromagnetische Wechselwirkungen 7
5) Geschwindigkeitsabhängige Massen 11
6) Energiesätze bei holonomen Nebenbedingungen 13
7) Der Energiesatz mit der Lagrangefunktion 16

1) Einleitung

Heutzutage kann ja jeder Laie beliebig viele verkehrte Energiebegriffe benutzen und gilt dann sofort als Energieexperte. Deshalb ist es vielleicht ganz nützlich daran zu erinnern, daß die Energiesätze aus den Bewegungsgleichungen der Punktmechanik abgeleitet werden. Wenn alles eine Energie ist, ist nicht gleich einzusehen, daß es verschiedene Energiesätze gibt, wie es hier in der Vortragsüberschrift steht. Daneben gibt es auch noch die Energiesätze der Kontinuumsmechanik, die ich in meinem Gummersbach-Vortrag aufgeschrieben habe.

Üblicherweise beweist man den Energiesatz mit der Voraussetzung, daß die Kraftfelder ein höchstens raum-zeit-abhängiges Potential besitzen, also nicht geschwindigkeitsabhängig sind. Als Sonderfall wird dann die Bewegung geladener Punktteilchen im äußeren elektromagnetischen Feld zugelassen, was dann in der Hochschullehre seine wichtigste Anwendung in der Quantenmechanik hat, wenn man den Zeeman-Effekt behandelt. Wenn das skalare Potential des elektrischen Feldes und das Vektorpotential des magnetischen Feldes zeitunabhängig sind, gibt es einen Energiesatz für diese geschwindigkeitsabhängige Lorentzkraft.

Mein früherer Doktorand T. Dietert entdeckte ein elektromagnetisches Wechselwirkungsgesetz, das er dann bei Rudolf Clausius (1875, 1876, 1877) fand:

[1] T. Dietert: Phasenraum-Schrödingergleichungen, Quantenmechanik und klassische Mechanik in einer umfassenden Theorie, Dissertation TU Braunschweig, Cognos-Institut Dreyer (1990), S. 75.

vgl. auch:

[2] G. Gerlich: Einführung in die Prinzipien und Methoden der theoretischen Physik, Manuskript zur Vorlesung: Klassische Feldtheorie (Elektrodynamik) (1993), S. 51.

Es stellt sich heraus, daß man aus diesem Wechselwirkungsgesetz Feldgleichungen ableiten kann, deren eine Hälfte die homogenen Maxwellschen Gleichungen sind (Induktionsgesetz, Lorentzkraft) und die andere Hälfte erhält man aus Lösungen von Poisson-Gleichungen, statt aus Wellengleichungen, die bei stationären Ladungs- und Stromdichten zusammenfallen. Dies findet man ausführlich in [2]. Dieses Resultat widerspricht der häufig geäußerten Behauptung von Quantenfeldtheoretikern, das Induktionsgesetz und die Lorentzkraft seien relativistische Effekte.

Der verstorbene Kollege Prof. Dr. A. O. Barut, dem wir als erstes dieses Gesetz mitteilten, behauptete in einer Publikation, daß man aus diesem Wechselwirkungsgesetz die vollen Maxwellschen Gleichungen erhielte. Dies ist falsch. Zwar sehen die inhomogenen Gleichungen fast so aus wie die zweite Hälfte der Maxwellschen Gleichungen, es fehlt aber das durch Induktion erzeugte elektrische Feld. Er berechnete mit diesem Wechselwirkungsgesetz mit einem einfachen Modell die Leptonenmassen.

2) Der einfachste Fall

Der Ausgangspunkt aller Ableitungen für die Energiesätze der Punktmechanik sind die Punktbewegungsgleichungen eines Systems von Massenpunkten:

$$m_{ik}\,\ddot{\underline{r}}^k = \underline{K}_i(r,\dot{r},t),\quad i, k=1,...., 3N.$$

Da hier durchgehend die Summationskonvention benutzt wird, haben wir hier die Massenmatrix eingeführt $m_{ik} = m_i\delta_{ik}$. Diese Bewegungsgleichungen werden nun mit $\dot{\underline{r}}^i$ skalar multipliziert und über alle i (und natürlich auch alle k) summiert:

$$m_{ik}\,\ddot{\underline{r}}^k \cdot \dot{\underline{r}}^i = \underline{K}_i(r,\dot{r},t)\cdot \dot{\underline{r}}^i \qquad (2.1)$$

Die linke Seite kann man als Zeitableitung der kinetischen Energie schreiben:

$$m_{ik}\,\ddot{\underline{r}}^k \cdot \dot{\underline{r}}^i = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_i}{2}\left\|\dot{\underline{r}}^i\right\|^2\right) = \frac{dT}{dt} \quad \text{(Summe über i, k)}$$

Wenn in den Kraftfeldern $\dot{r}$ nicht vorkommt und ein skalares Potential V von r existiert mit

$$\underline{K}_i = -V,_{\underline{r}^i} = -\nabla_{\underline{r}^i} V,$$

erhält man für die rechte Seite von (2.1): $\underline{K}_i(r,t)\cdot\dot{\underline{r}}^i = -\dfrac{dV}{dt} + V,_t$ und insgesamt $\dfrac{d}{dt}(T+V) = V,_t$.

Energiesatz 1: Wenn die Kraftfelder ein zeitunabhängiges Potential V besitzen, ist die Gesamtenergie $E_1 = T + V$ bei der Bewegung konstant.

3) Geschwindigkeitsabhängige Kraftfelder

Wenn die geschwindigkeitsabhängigen Kraftfelder ein dynamisches Potential U besitzen und deshalb gilt

$$\underline{K}_i(r,\dot{r},t) = -U,_{\underline{r}^i} + \frac{d}{dt}\left(U,_{\underline{\dot{r}}^i}\right),$$

erhält man für die rechte Seite von (2.1):

$$\underline{K}_i(r,\dot{r},t)\cdot\underline{\dot{r}}^i = -U,_{\underline{r}^i}\cdot\underline{\dot{r}}^i + \frac{d}{dt}\left(U,_{\underline{\dot{r}}^i}\right)\cdot\underline{\dot{r}}^i = -U,_{\underline{r}^i}\cdot\underline{\dot{r}}^i + \frac{d}{dt}\left(U,_{\underline{\dot{r}}^i}\cdot\underline{\dot{r}}^i\right) - U,_{\underline{\dot{r}}^i}\cdot\underline{\ddot{r}}^i - U,_t + U,_t$$

$$= \frac{d}{dt}\left(U,_{\underline{\dot{r}}^i}\cdot\underline{\dot{r}}^i - U\right) + U,_t\,.$$

Damit ergibt sich $\frac{d}{dt}\left(T + U - U,_{\underline{\dot{r}}^i}\cdot\underline{\dot{r}}^i\right) = U,_t$ und der Satz:

Energiesatz 2: Wenn die Kraftfelder ein zeitunabhängiges dynamisches Potential U besitzen, ist die Gesamtenergie $E_2 = T + U - U,_{\underline{\dot{r}}^i}\cdot\underline{\dot{r}}^i$ bei der Bewegung konstant.

Zerlegt man U in einen nur von r abhängigen und einen auch von $\dot{r}$ abhängigen Teil

$$U(r,\dot{r},t) = V(r,t) - M(r,\dot{r},t),$$

erhält man für die Gesamtenergie: $T + V - M + M,_{\underline{\dot{r}}^i} \cdot \underline{\dot{r}}^i$. Dies liefert die folgenden Aussagen:

Ist die Funktion M homogen vom Grad 1 in den Geschwindigkeiten, ist $M = M,_{\underline{\dot{r}}^i} \cdot \underline{\dot{r}}^i$ und die Gesamtenergie ist gegeben durch T+V.

Dies ist der übliche Fall, wenn man geladene Teilchen in einem äußeren elektromagnetischen Feld beschreibt. Hiermit behandelt man in der Quantentheorie den Zeeman-Effekt. Es ist dann U gegeben durch $U(\underline{r},\underline{\dot{r}},t) = q\,\phi(\underline{r},t) - q\,\underline{\dot{r}} \cdot \underline{A}(\underline{r},t)$, wobei ϕ das skalare und $\underline{A}$ das Vektorpotential ist. Tatsächlich ist dies sogar die einzig mögliche Form von U, wenn man verlangt, daß durch das dynamische Potential keine Beschleunigungsterme auftreten sollen. Dann muß $U,_{\underline{\dot{r}}^i}$ unabhängig von $\dot{r}$ sein, also U in $\dot{r}$ höchstens inhomogen linear: $U(r,\dot{r},t) = \Phi(r,t) + \dot{r}^i \Psi,_{\dot{r}^i}(r,t)$.

Ist die Funktion M homogen vom Grad 2 in den Geschwindigkeiten, ist $M,_{\underline{\dot{r}}^i} \cdot \underline{\dot{r}}^i = 2M$ und die Gesamtenergie ist gegeben durch T+V+M.

Dies ist der Fall der hier im folgenden behandelten elektromagnetischen Wechselwirkungen. Die Gesamtenergie ist also nicht gleich $T + U = T + V - M$, wie man leicht vemuten würde, sondern $T + V + M$.

4) Geschwindigkeitsabhängige elektromagnetische Wechselwirkungen

Das von Rudolf Clausius (1875) angegeben elektromagnetische Grundgesetz hat als dynamisches Potential (alle vier Potentiale zitiert nach[1]; wir schreiben hier anstelle von $\dot{\underline{r}}^i = \underline{v}^i$):

$$U_{\text{Clausius}} = \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{8\pi\varepsilon_0 \left\| \underline{r}^i - \underline{r}^j \right\|} \left(1 - \frac{\underline{v}^i \cdot \underline{v}^j}{c^2} \right) .$$

Dieses Wechselwirkungspotential soll schon 1845 von H. Grassmann angegeben worden sein.

Von W. E. Weber (1848) stammt das dynamische Potential:

$$U_{\text{Weber}} = \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{8\pi\varepsilon_0 \left\| \underline{r}^i - \underline{r}^j \right\|} \left(1 - \frac{\left(\left(\underline{v}^i - \underline{v}^j \right) \cdot \left(\underline{r}^i - \underline{r}^j \right) \right)^2}{2c^2 \left\| \underline{r}^i - \underline{r}^j \right\|^2} \right) .$$

Von B. Riemann (1876) stammt das dynamische Potential:

$$U_{\text{Riemann}} = \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{8\pi\varepsilon_0 \left\| \underline{r}^i - \underline{r}^j \right\|} \left(1 + \frac{\left\| \underline{v}^i - \underline{v}^j \right\|^2}{2c^2} \right) .$$

Ein relativ modernes dynamisches Potential stammt von C. G. Darwin (1920):

$$U_{\text{Darwin}} = \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{8\pi\varepsilon_0 \left\| \underline{r}^i - \underline{r}^j \right\|} \left(1 - \frac{\underline{v}^i \cdot \underline{v}^j}{2c^2} - \frac{\left(\underline{v}^i \cdot \left(\underline{r}^i - \underline{r}^j \right) \right) \left(\underline{v}^j \cdot \left(\underline{r}^i - \underline{r}^j \right) \right)}{2c^2 \left\| \underline{r}^i - \underline{r}^j \right\|^2} \right) .$$

Für alle vier hier angegebenen dynamischen Potentiale gilt der Energiesatz 2 , da alle U nicht explizit zeitabhängig sind. Natürlich sind alle Gesamtenergien verschieden.

Für das dynamische Clausius-Potential erhalten wir für das Kraftfeld auf das k-te Teilchen:

$$\begin{aligned}\underline{K}_{\underline{r}^k} = \sum_{i(\neq k)} \frac{q_k q_i}{4\pi\varepsilon_0 \left\|\underline{r}^k - \underline{r}^i\right\|^3}\left(\underline{r}^k - \underline{r}^i\right) + \sum_{i(\neq k)} \frac{q_k q_i}{4\pi\varepsilon_0 c^2 \left\|\underline{r}^k - \underline{r}^i\right\|^3}\left(\underline{v}^k \times \left(\underline{v}^i \times \left(\underline{r}^k - \underline{r}^i\right)\right)\right) \\ - \sum_{i(\neq k)} \frac{q_k q_i}{4\pi\varepsilon_0 c^2 \left\|\underline{r}^k - \underline{r}^i\right\|^3}\left(\underline{r}^k - \underline{r}^i\right)\cdot \underline{v}^i\, \underline{v}^i - \sum_{i(\neq k)} \frac{q_k q_i}{4\pi\varepsilon_0 c^2 \left\|\underline{r}^k - \underline{r}^i\right\|}\dot{\underline{v}}^i \ .\end{aligned} \tag{4.1}$$

Mit $m_{ik}\ddot{\underline{r}}^i = \underline{K}_{\underline{r}^k}$ erhält man die Bewegungsgleichungen des N-Teilchensystems. Wenn man nun das Teilchen k herausgreift und sich die Bewegungen der anderen Teilchen gegeben denkt, erhält man ein Kraftfeld auf das Probeteilchen, an dessen Koordinaten und Geschwindigkeiten wir nicht mehr den Index k anschreiben müssen:

$$\begin{aligned}m\dot{\underline{v}} = \underline{K}(\underline{r},\underline{v},t) = \sum_i \frac{q q_i}{4\pi\varepsilon_0 \left\|\underline{r} - \underline{r}_t^i\right\|^3}\left(\underline{r} - \underline{r}_t^i\right) + \sum_i \frac{q q_i}{4\pi\varepsilon_0 c^2 \left\|\underline{r} - \underline{r}_t^i\right\|^3}\left(\underline{v} \times \left(\underline{v}_t^i \times \left(\underline{r} - \underline{r}_t^i\right)\right)\right) \\ - \sum_i \frac{q q_i}{4\pi\varepsilon_0 c^2 \left\|\underline{r} - \underline{r}_t^i\right\|^3}\left(\underline{r} - \underline{r}_t^i\right)\cdot \underline{v}_t^i\, \underline{v}_t^i - \sum_i \frac{q q_i}{4\pi\varepsilon_0 c^2 \left\|\underline{r} - \underline{r}_t^i\right\|}\dot{\underline{v}}_t^i \ .\end{aligned} \tag{4.2}$$

Der zweite Term ist ein Kraftfeld senkrecht zur Geschwindigkeit der Probeteilchens. Durch die Zeitabhängigkeit von $\underline{r}_t^i$ und $\underline{v}_t^i$ ist dieses Kraftfeld i. a. explizit zeitabhängig.

Mit den Feldern

$$\Phi(\underline{r},t)=\sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\left\|\underline{r}-\underline{r}_t^i\right\|} \quad (4.3) \text{ und } \underline{A}(\underline{r},t)=\sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2\left\|\underline{r}-\underline{r}_t^i\right\|} q^i\,\underline{v}_t^i=\sum_i \frac{\mu_0}{4\pi\left\|\underline{r}-\underline{r}_t^i\right\|} q^i\,\underline{v}_t^i \quad (4.4)$$

kann man definieren

$$\underline{B}(\underline{r},t)=\nabla\times\underline{A}(\underline{r},t) \text{ und } \underline{E}(\underline{r},t)=-\nabla\Phi(\underline{r},t)-\frac{\partial\underline{A}(\underline{r},t)}{\partial t} \quad (4.5).$$

Dann kann man nachrechnen, daß die obige Bewegungsgleichung (4.2) geschrieben werden kann als:

$$m\dot{\underline{v}}=q\left(\underline{E}(\underline{r},t)+\underline{v}\times\underline{B}(\underline{r},t)\right) \quad (4.6).$$

Daß diese Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$ die homogene Hälfte der Maxwellschen Gleichungen $\operatorname{div}\underline{B}=0$ und $\operatorname{rot}\underline{E}=-\frac{\partial B}{\partial t}$ erfüllen, woraus das Induktionsgesetz folgt, ist klar. Man rechnet auch leicht nach, daß die Potentiale die Lorentzkonvention erfüllen: $\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\operatorname{div}\underline{A}=0$ (4.7).

Macht man in Φ und $\underline{A}$ in (4.3) une (4.4) den Übergang zu kontinuierlichen Ladungs- und Stromdichten, erhält man die Poisson-Gleichungen $\Delta\Phi=-\frac{\rho_e}{\varepsilon_o}$ und $\Delta\underline{A}=-\mu_o\,\underline{j}$, was man mit (4.7) in $\operatorname{div}\underline{E}_{Pot}=\frac{\rho_e}{\varepsilon_o}$ und $\operatorname{rot}\underline{B}=\mu_o\,\underline{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\underline{E}_{Pot}}{\partial t}$ mit $\underline{E}_{Pot}=-\nabla\Phi$ und $\underline{B}=\nabla\times\underline{A}$ umschreiben kann.

Wenn man den Index Pot wegläßt, wäre dies die inhomogene Hälfte der Maxwellschen Gleichungen.

Da man aus den Gleichungen (4.3), (4.4) und (4.5) die Gleichung (4.2) und damit (4.1) ausrechnen kann, sind also die Formeln für die Potentiale (4.3) und (4.4) gleichwertig zur Clausius-Wechselwirkung. Auf diesem Weg hatten wir die Clausius-Wechselwirkung gefunden.

Wir wollen hier nur noch für das dynamische Potential nach Weber die Kraft auf ein Teilchen angeben, das sich im Phasenraum an der Stelle $(\underline{r}, \underline{v})$ befindet:

$$\underline{K}_W = \sum_i \frac{q q_i}{4\pi\varepsilon_0 \left\| \underline{r} - \underline{r}_t^i \right\|^3} \left(\underline{r} - \underline{r}_t^i \right) \left(1 - \frac{3}{2c^2} \left(\frac{\left(\underline{v} - \underline{v}_t^i \right) \cdot \left(\underline{r} - \underline{r}_t^i \right)}{\left\| \underline{r} - \underline{r}_t^i \right\|} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left\| \underline{v} - \underline{v}_t^i \right\|^2 + \frac{1}{c^2} \left(\underline{r} - \underline{r}_t^i \right) \cdot \left(\dot{\underline{v}} - \dot{\underline{v}}_t^i \right) \right)$$

Die Geschwindigkeiten beeinflussen hier nur die Coulombkraft in der Richtung der Verbindungslinie. Eine Kraft senkrecht zur Geschwindigkeit des Probeteilchens gibt es hier nicht. Hiermit erhält man also nicht die Lorentzkraft, die ja schon von Maxwell stammt.

5) Geschwindigkeitsabhängige Massen

Bei den obigen Ableitungen der Energiesätze war stillschweigend vorausgesetzt, daß die Massen der Teilchen konstant waren. Mit der üblichen "relativistischen" Masse

$$\frac{m_{ik}^{o}}{\sqrt{1-\frac{\left\|\underline{v}^{k}\right\|^{2}}{c^{2}}}}$$

formen wir die linke Seite der Bewegungsgleichung um. Weiter unten werden wir zeigen, wie man Energiesätze gewinnen kann, wenn man die Bewegungsgleichungen als Lagrange-Gleichungen 2. Art schreiben kann. Dann kann man auch andere Geschwindigkeitsabhängigkeiten der Massen behandeln. Die Bewegungsgleichungen des Systems von Massenpunkten lauten also:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_{ik}^{o}}{\sqrt{1-\frac{\left\|\underline{v}^{k}\right\|^{2}}{c^{2}}}}\underline{v}^{k}\right)=\underline{K}_{i}$$

Wir schreiben hier $\underline{v}^i$ statt $\dot{\underline{r}}^i$. Wir multiplizierten mit $\underline{v}^i$ und benutzen die Kettenregel:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_{ik}^o}{\sqrt{1-\frac{\left\|\underline{v}^k\right\|^2}{c^2}}}\underline{v}^k\right)\cdot\underline{v}^i = m_i^o\left(1-\frac{\left\|\underline{v}^i\right\|^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{\left\|\underline{v}^i\right\|^2}{c^2}\underline{v}^i\cdot\frac{d\underline{v}^i}{dt} + m_i^o\left(1-\frac{\left\|\underline{v}^i\right\|^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d\underline{v}^i}{dt}\cdot\underline{v}^i =$$

$$= m_i^o\left(1-\frac{\left\|\underline{v}^i\right\|^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\underline{v}^i\cdot\frac{d\underline{v}^i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i^o c^2\left(1-\frac{\left\|\underline{v}^i\right\|^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Energiesatz 3: Wenn die Kraftfelder ein zeitunabhängiges dynamisches Potential U besitzen, ist die Gesamtenergie $E_3 = T^v + U - U_{,\dot{\underline{r}}^i}\cdot\dot{\underline{r}}^i$ bei der Bewegung konstant, wobei bei "relativistischen" Massen $T^v = \sum_i m_i^o c^2\left(1-\frac{\left\|\underline{v}^i\right\|^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ zu setzen ist. Natürlich könnte man $m_i^o c^2$ bei jedem Summanden von T^v subtrahieren.

6) Energiesätze bei holonomen Nebenbedingungen

Die durch die holonomen Nebenbedingungen $\varphi^{\mu}(r,t)=0$ definierte f-dimensionale Mannigfaltigkeit wird durch die Parameterdarstellung mit generalisierten Koordinaten dargestellt

$$\underline{r}^{i}=f^{\underline{r}^{i}}\left(q^{1},\ldots,q^{f},t\right)\quad(6.1).$$

Die Tangentenvektoren $f^{\underline{r}^{i}}{}_{,q^{\alpha}}$ stehen senkrecht auf den Gradienten $\nabla_{\underline{r}^{k}}=\varphi^{\mu}{}_{,\underline{r}^{k}}$, wie man mit der Kettenregel beweist. Die Parameterdarstellung liefert auch noch Gleichungen für die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen:

$$\dot{\underline{r}}^{i}=\bar{f}^{\dot{\underline{r}}^{i}}(q,\dot{q},t)=\bar{f}^{\underline{r}^{i}}{}_{,q^{\alpha}}\dot{q}^{\alpha}+\bar{f}^{\underline{r}^{i}}{}_{,t}\quad(6.2)\quad \ddot{\underline{r}}^{i}=\bar{f}^{\underline{r}^{i}}{}_{,t,t}+\bar{f}^{\underline{r}^{i}}{}_{,q^{\alpha},q^{\beta}}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}+2\bar{f}^{\underline{r}^{i}}{}_{,t,q^{\alpha}}\dot{q}^{\alpha}+\bar{f}^{\underline{r}^{i}}{}_{,q^{\alpha}}\ddot{q}^{\alpha}$$

Wenn man bei Bewegungsgleichungen $m_{ik}\ddot{\underline{r}}^{k}=\underline{K}_{i}(r,\dot{r},t)$ holonome Nebenbedingungen einführt, muß man noch Zwangskräfte $\underline{Z}_{k}$ einführen, damit die Kurven nicht die durch die holonomen Nebenbedingungen gegebene Mannigfaltigkeit verlassen:

$$m_{ik}\left(\bar{f}^{\underline{r}^{i}}{}_{,t,t}+\bar{f}^{\underline{r}^{i}}{}_{,q^{\alpha},q^{\beta}}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}+2\bar{f}^{\underline{r}^{i}}{}_{,t,q^{\alpha}}\dot{q}^{\alpha}+\bar{f}^{\underline{r}^{i}}{}_{,q^{\alpha}}\ddot{q}^{\alpha}\right)=\underline{K}_{k}\Big|_{\underline{r}=f^{\underline{r}}(q,t)}+\underline{Z}_{k}$$

Mit dem Newtonschen Projektionsverfahren kann man die Zwangskräfte eliminieren, weil sie senkrecht auf den Tangentenvektoren $f^{\underline{r}^i}{}_{,q^\alpha}$ stehen. Man erhält also f Bewegungsgleichungen, indem man die Gleichungen mit den f Tangentenvektoren skalar multipliziert:

$$m_i \bar{f}^{\underline{r}^i}{}_{,q^\alpha} \cdot \left(\bar{f}^{\underline{r}^i}{}_{,t,t} + \bar{f}^{\underline{r}^i}{}_{,q^\gamma,q^\beta} \dot{q}^\gamma \dot{q}^\beta + 2\bar{f}^{\underline{r}^i}{}_{,t,q^\beta} \dot{q}^\beta + \bar{f}^{\underline{r}^i}{}_{,q^\beta} \ddot{q}^\beta \right) = \underline{K}_k \Big|_{\underline{r}=f^{\underline{r}}(q,t)} \cdot \bar{f}^{\underline{r}^k}{}_{,q^\alpha} \quad (6.3)$$

Man nennt $Q_\alpha = \underline{K}_k \Big|_{\underline{r}=f^{\underline{r}}(q,t)} \cdot f^{\underline{r}^k}{}_{,q^\alpha}$ die generalisierten Kräfte. Wenn man die Geschwindigkeiten als Funktionen der generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten in der kinetischen Energie einsetzt

$$\tilde{T}(q,\dot{q},t) = m_i \left(\bar{f}^{\underline{r}^i}{}_{,q^\beta} \dot{q}^\beta + \bar{f}^{\underline{r}^i}{}_{,t} \right) \cdot \left(\bar{f}^{\underline{r}^i}{}_{,q^\gamma} \dot{q}^\gamma + \bar{f}^{\underline{r}^i}{}_{,t} \right),$$

kann man ausrechnen, daß man die Gleichung (6.3) schreiben kann als

$$\frac{d}{dt}\left(\tilde{T}_{,\dot{q}^\alpha} \right) - \tilde{T}_{,q^\alpha} = Q_\alpha \quad (6.3).$$

Man kann nun den folgenden Hilfssatz beweisen:

Hilfssatz: Wenn ohne die Nebenbedingungen die Kräfte ein dynamisches Potential haben, haben bei holonomen Nebenbedingungen die generalisierten Kräfte in den generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten auch ein dynamisches Potential, indem man im dynamischen Potential die Variablen mit (6.1) und (6.2) ersetzt.

Beweis (Das Ersetzen schreibe ich nicht mit und benutze durchnumerierte Variable.):

Mit $K_{r^i} = -U,_{r^i} + \frac{d}{dt}\left(U,_{\dot r^i}\right)$ und $\tilde U(q,\dot q,t) = U\Big|_{\substack{r=f^r(q,t)\\ \dot r=f^{\dot r}(q,\dot q,t)}}$ erhält man:

$$Q_\alpha = -U,_{r^i}\,\bar f,^{r^i}_{q^\alpha} + \bar f,^{r^i}_{q^\alpha}\frac{d}{dt}\left(U,_{\dot r^i}\right) = -U,_{r^i}\,\bar f,^{r^i}_{q^\alpha} - U,_{\dot r^i}\,\bar f,^{\dot r^i}_{q^\alpha} + U,_{\dot r^i}\,\bar f,^{\dot r^i}_{q^\alpha} + \frac{d}{dt}\left(U,_{\dot r^i}\right)\bar f,^{r^i}_{q^\alpha} =$$

$$= -\tilde U,_{q^\alpha} + U,_{\dot r^i}\,\bar f,^{\dot r^i}_{q^\alpha} + \frac{d}{dt}\left(U,_{\dot r^i}\,\bar f,^{r^i}_{q^\alpha}\right) - U,_{\dot r^i}\frac{d}{dt}\left(\bar f,^{r^i}_{q^\alpha}\right) =$$

$$= -\tilde U,_{q^\alpha} + U,_{\dot r^i}\left(\bar f,^{r^i}_{q^\alpha},_t + \bar f,^{r^i}_{q^\alpha},_{q^\beta}\,\dot q^\beta\right) + \frac{d}{dt}\left(U,_{\dot r^i}\,\bar f,^{\dot r^i}_{\dot q^\alpha}\right) - U,_{\dot r^i}\,\bar f,^{r^i}_{q^\alpha},_t - U,_{\dot r^i}\,\bar f,^{r^i}_{q^\alpha},_{q^\beta}\,\dot q^\beta =$$

$$= -\tilde U,_{q^\alpha} + \frac{d}{dt}\left(\tilde U,_{\dot q^\alpha}\right).$$

Hiermit erhält man sofort den Satz:

Wenn die Kräfte ein dynamisches Potential besitzen, kann man die Bewegungsgleichungen $\frac{d}{dt}\left(\tilde T,_{\dot q^\alpha}\right) - \tilde T,_{q^\alpha} = Q_\alpha$ in den generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten mit der Lagrange-Funktion $L = \tilde T - \tilde U$ in der Form $\frac{d}{dt}\left(L,_{\dot q^\alpha}\right) - L,_{q^\alpha} = 0$ schreiben.

7) Der Energiesatz mit der Lagrangefunktion

Energiesatz 4: Wenn sich das mechanische System mit einer Lagrange-Funktion beschreiben läßt, die nicht explizit zeitabhängig ist, gilt der Energiesatz mit der Gesamtenergie

$$E_4 = \dot{q}^\alpha L,_{\dot{q}^\alpha} - L.$$

Beweis durch Nachrechnen:

Die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(L,_{\dot{q}^\alpha}\right) - L,_{q^\alpha} = 0$$

multiplizieren wir mit $\dot{q}^\alpha$, summieren über α und erhalten mit der Produkt- und Kettenregel:

$$0 = \dot{q}^\alpha \frac{d}{dt}\left(L,_{\dot{q}^\alpha}\right) - \dot{q}^\alpha L,_{q^\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\dot{q}^\alpha L,_{\dot{q}^\alpha}\right) - \ddot{q}^\alpha L,_{\dot{q}^\alpha} - \dot{q}^\alpha L,_{q^\alpha} - L,_t + L,_t =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\dot{q}^\alpha L,_{\dot{q}^\alpha}\right) - \frac{d}{dt}(L) + L,_t = \frac{d}{dt}\left(\dot{q}^\alpha L,_{\dot{q}^\alpha} - L\right) + L,_t .$$

Wenn man bei den hier behandelten geschwindigkeitsabhängigen Massen setzt

$$T^v = -\sum_i m_i^o \, c^2 \sqrt{1 - \frac{\left\|\underline{v}^i\right\|^2}{c^2}} \ ,$$

erhalten die Bewegungsgleichungen die Form von Lagrange-Gleichungen 2. Art, wenn die Kraftfelder ein dynamischen Potential haben:

$$\frac{d}{dt}\left(T^v{}_{,\underline{v}^i}\right) - T^v{}_{,\underline{r}^i} = \frac{d}{dt}\left(T^v{}_{,\underline{v}^i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_{ik}^o}{\sqrt{1 - \frac{\left\|\underline{v}^k\right\|^2}{c^2}}}\,\underline{v}^k\right) = Q_i.$$

Den durch die geschwindigkeitsabhängigen Massen bestimmten Teil der Energieerhaltungsgröße berechnet man mit der Formel der Folie 16

$$\underline{v}^i \cdot T^v{}_{,\underline{v}^i} - T^v = \sum_i m_i^o \left(1 - \frac{\|\underline{v}^i\|^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \|\underline{v}^i\|^2 + \sum_i m_i^o c^2 \left(1 - \frac{\|\underline{v}^i\|^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_i m_i^o \left(1 - \frac{\|\underline{v}^i\|^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\|\underline{v}^i\|^2 + c^2 \left(1 - \frac{\|\underline{v}^i\|^2}{c^2}\right)\right) == \sum_i m_i^o c^2 \left(1 - \frac{\|\underline{v}^i\|^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Dies ist das Ergebnis, das wir auf der Folie 12 erhalten haben:

$$E = \sum_i m_i c^2 .$$

Bei aller Freude über diese schöne Schlußformel muß man leider bedenken, daß dies nicht die Gesamtenergie ist und der Teil mit dem dynamischen Potential U noch hinzugefügt werden müßte.